مفاهيم وقوانين

الجبر

الصف الثالث الثانوى

إهداء من منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

التباديل

تعريف

مبدأ العد

إذا أمكن إجراء عملية بعدة طرق مختلفة عددها م ، و فى نفس الوقت أمكن إجراء عملية أخرى بعدة طرق مختلفة عددها ن فإن : عدد طرق إجراء العمليتين معاً = م × ن

التباديل

هو أى ترتيب يمكن تكوينه من مجموعة من الأشياء بأخذها كلها أو بعضها

أى أن

ن ل ر = ن (ن − ١) (ن − ٢) ...... (ن − ر + ١)

ملاحظات

- ١ ≤ ر ≤ ن ، ر ، ن ∈ ص
- عدد العوامل = ر
- آخر العوامل = (ن − ر + ١)
- كل عامل يصغر عن سابقه بمقدار ١
- ن ل ر يعنى عدد طرق إختيار ر عنصر من بين ن عنصر مع الترتيب
- العامل الأوسط = ½ (٢ن − ر + ١)
- أكبر العوامل = ن
- تعريف: ن ل . = ١

مضروب العدد

هو عدد التباديل لأشياء عددها ن مأخوذة جميعاً في كل مرة

أى أن

ن ل ن = |ن = ن (ن − ١) (ن − ٢) ...... × ٣ × ٢ × ١

ملاحظات

- عدد العوامل = ن
- أكبر العوامل = ن
- آخر العوامل = ١
- كل عامل يصغر عن سابقه بمقدار ١
- تعريف: |٠ = ١
- نتيجة: |ن = ن |ن − ١

نتيجة

ن ل ر = |ن ÷ |ن − ر

التوافيق

تعريف

هو كل مجموعة تتكون من كل أو من جزء من الأشياء بصرف النظر عن ترتيب مفردات المجموعة

العلاقة بين التباديل و التوافيق

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{ر!}$$

ملاحظات

- $${}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$$
- أكبر العوامل فى البسط = ن ، عدد العوامل فى المقام = ر
- $١ \leqslant ر \leqslant ن$ ، ر ، ن $\in$ ص$^{+}$
- عدد العوامل فى البسط = عدد العوامل فى المقام = ر
- ${}^{ن}ق_{ر}$ يعنى عدد طرق إختيار ر عنصر من بين ن عنصر بدون الترتيب

نتائج و ملاحظات

- $${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$$
- ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$ ، ${}^{ن}ق_{١} = ن$
- إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإن :
  - ن = ر + هـ
  - ر = هـ
  - حيث : ر + هـ $\leqslant$ ن
- $${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$$
- $$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$
  - لإيجاد النسبة بين ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢}$ نقسم كلاً من التوفيقتين على ${}^{ن}ق_{ر-١}$
  - إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ل}$ ، ${}^{ن}ق_{م}$ فى تتابع هندسى فإن : $$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ل}} = \frac{{}^{ن}ق_{ل}}{{}^{ن}ق_{م}}$$
  - إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ل}$ ، ${}^{ن}ق_{م}$ فى تتابع حسابى فإن : $$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ل}} + \frac{{}^{ن}ق_{م}}{{}^{ن}ق_{ل}} = ٢$$

نظرية ذات الحدين

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، ن عدد صحيح موجب فإن :

$$(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ب}\,\text{أ}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{\text{ن}-٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{ب}^{٣}\,\text{أ}^{\text{ن}-٣} + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}} + \cdots + \text{ب}^{\text{ن}}$$

ملاحظات

عدد الحدود = ن + ١

قوى الحد الأول (أ) تكون تنازلية ، قوى الحد الثانى (ب) تكون تصاعدية
بحيث : يكون مجموع قوتى (أ) ، (ب) فى أى حد هو ن

$$(\text{أ}-\text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} - \text{ن}\,\text{ب}\,\text{أ}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{\text{ن}-٢} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{ب}^{٣}\,\text{أ}^{\text{ن}-٣} + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(-\text{ب})^{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}} + \cdots + (-\text{ب})^{\text{ن}}$$

نتيجة

$$(١+\text{س})^{\text{ن}} = ١ + \text{ن}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ر}} + \cdots + \text{س}^{\text{ن}}$$

$$(١-\text{س})^{\text{ن}} = ١ - \text{ن}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(-\text{س})^{\text{ر}} + \cdots + (-\text{س})^{\text{ن}}$$

ملاحظة

$$،\ (١+\text{س})^{\text{ن}} + (١-\text{س})^{\text{ن}} = ٢\,(\text{ح}_{١} + \text{ح}_{٣} + \text{ح}_{٥} + \cdots\cdots)$$

$$،\ (١+\text{س})^{\text{ن}} - (١-\text{س})^{\text{ن}} = ٢\,(\text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٤} + \text{ح}_{٦} + \cdots\cdots)$$

الحد العام

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{الثانى})^{\text{ر}}\,(\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$$ حيث : ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ‎....‎ ، ن

تابع : نظرية ذات الحدين

الحد الأوسط و الحدين الأوسطين

(ا) إذا كانت : ن زوجية يوجد حد أوسط واحد ترتيبه هو : $\frac{ن}{٢} + ١$

(٢) إذا كانت : ن فردية يوجد حدان أوسطان ترتيبهما هما : $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$

الحد المشتمل على $س^{ك}$

لإيجاد الحد المشتمل على ($س^{ك}$) فى مفكوك $(س + ا)^{ن}$ نتبع ما يلى :

(ا) نوجد الحد العام ($ع_{ر+١}$) للمفكوك فى أبسط صورة

(٢) نضع أس س = ك فنحصل على قيمة ر بشرط ر ∈ ط فيكون :

* رتبة الحد الذى يحتوى على ($س^{ك}$) = ر + ١
* الحد الذى يحتوى على ($س^{ك}$) هو ($ع_{ر+١}$)
* معامل ($س^{ك}$) هو معامل ($ع_{ر+١}$)

ملاحظات

- إذا كانت : ر = صفر فإن : المفكوك يحتوى على حد خالٍ من س
- إذا كان ناتج قيمة ر قيمة كسرية أو سالبة أو أكبر من ن يكون المفكوك غير محتوياً على ($س^{ك}$)

النسبة بين حدين متتالين فى مفكوك $(س + ا)^{ن}$

$$\frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{ا}{س}$$

ملاحظات

- لإيجاد النسبة بين $^{ن}ع_{ر}$ ، $^{ن}ع_{ر-٢}$ نقسم كلاً من الحدين على $^{ن}ع_{ر-١}$
- إذا كان : $^{ن}ع_{ر}$ ، $^{ن}ع_{ك}$ ، $^{ن}ع_{م}$ فى تتابع حسابى فإن : $\frac{^{ن}ع_{ر}}{^{ن}ع_{ك}} + \frac{^{ن}ع_{م}}{^{ن}ع_{ك}} = ٢$
- إذا كان : $^{ن}ع_{ر}$ ، $^{ن}ع_{ك}$ ، $^{ن}ع_{م}$ فى تتابع هندسى فإن : $\frac{^{ن}ع_{ر}}{^{ن}ع_{ك}} = \frac{^{ن}ع_{ك}}{^{ن}ع_{م}}$

الأعداد المركبة

العدد التخيلى ت

هو العدد الذى مربعه يساوى (−١)

أى أن : ت^٢ = −١

قوى العدد ت

القوى الصحيحة للعدد ت تعطى إحدى القيم			
١	ت	−١	−ت

قيم العدد ت تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٤

لإيجاد ت^ن في أبسط صورة حيث ن ∈ ص+ نقسم ن على ٤ فيكون :

ت^ن = إحدى القيم كما يلى :

باقى القسمة	٠	١	٢	٣
القيمة	١	ت	−١	−ت

لإيجاد ت^−ن في أبسط صورة حيث ن ∈ ص+ نضيف إلى الأس عدد يقبل القسمة على ٤ و يكون أكبر من ن مباشرة

مجموعة الأعداد التخيلية

ت = { س : س = ﺃ ت ، ﺃ ∈ ح ، ت^٢ = −١ }

العدد المركب

هو ما كان على الصورة : ع = س + ت ص

حيث : س ، ص ∈ ح ، ت^٢ = −١

ملاحظات

يطلق على س الجزء الحقيقى ، على ص الجزء التخيلى

و إذا كان س = ٠ ، فإن العدد يكون تخيلياً صرفاً ، إذا كان ص فإن العدد يكون حقيقياً صرفاً

لكتابة العدد المركب فى أبسط صورة يضرب كلاً من البسط و المقام فى مرافق المقام

مجموعة الأعداد المركبة

ك = { س + ت ص : س ، ص ∈ ح ، ت^٢ = −١ }

تساوى عددين مركبين

إذا كان : س + ت ص = ﺃ + ت ب

فإن : س = ﺃ ، ص = ب

خاصية

إذا كان : س + ت ص = ٠

فإن : س = ٠ ، ص = ٠

تابع : الأعداد المركبة

مجموع عددين مركبين

$ع_1 + ع_2 = س_1 + س_2 + ت\,(ص_1 + ص_2)$

المعكوس الجمعى للعدد المركب

المعكوس الجمعى للعدد $ع = س + ت\,ص$

هو العدد : $-ع = -س - ت\,ص$

حاصل ضرب عددين مركبين

$ع_1 \cdot ع_2 = (س_1 س_2 - ص_1 ص_2) + ت\,(س_1 ص_2 + س_2 ص_1)$

المعكوس الضربى للعدد المركب

المعكوس الضربى للعدد $ع = س + ت\,ص$

هو العدد : $\frac{1}{ع}\ (ع^{-1}) = \frac{س}{س^2 + ص^2} - \frac{ص}{س^2 + ص^2}\,ت$

حيث : $س^2 + ص^2 \neq 0$

العدد المرافق لعدد مركب

إذا كان العدد المركب $ع = س + ت\,ص$ فإن العدد المركب $\bar{ع} = س - ت\,ص$ يسمى مرافق العدد ع

ملاحظة

العددان المركبان المترافقان مختلفان فقط في إشارة الجزء التخيلى منهما

خواص العددان المترافقان

- $\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع}_1 + \bar{ع}_2$
- $ع + \bar{ع} = 2س \in ح$
- $ع \cdot \bar{ع} = س^2 + ص^2 \in ح$
- $\overline{ع_1 \cdot ع_2} = \bar{ع}_1 \cdot \bar{ع}_2$

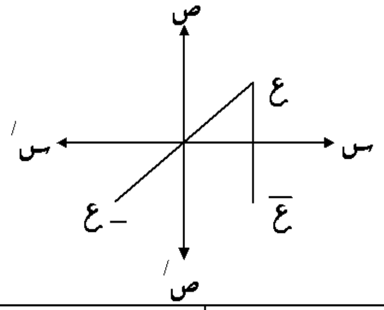
ملاحظة

إذا كانت معاملات حدود معادلة ما أعداد حقيقية و كان أحد جذورها عدد مركب فإن مرافق هذا العدد يكون أيضاً جذر لهذه المعادلة

تابع : الأعداد المركبة

التمثيل البيانى للأعداد المركبة " أشكال آرجاند "

الشكل التالى : يسمى شكل أرجاند يوضح تمثيل النقطة (س ، ص) تمثل العدد : ع = س + ت ص ، النقطة (– س ، – ص) تمثل معكوسه الجمعى : – ع = – س – ت ص ، النقطة (س ، – ص) تمثل مرافقه : $\bar{ع}$ = س – ت ص

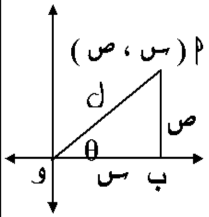


ملاحظة

* المحور الأفقى يمثل الجزء الحقيقى للعدد المركب بينما المحور الرأسى يمثل الجزء التخيلى له
* النقطتان اللتان تمثلان العدد ع و معكوسه الجمعى متماثلتين بالنسبة لنقطة الأصل
* النقطتان اللتان تمثلان العدد ع و مرافقه متماثلتين بالنسبة لمحور السينات

المقياس و السعة للعدد المركب

إذا كان : العدد المركب ع = س + ت ص تمثله النقطة ٩ (س ، ص) فى شكل أرجاند فإن :



مقياس العدد ع هو : ‖ $\overline{و ٩}$ ‖

حيث : ل = | ع | = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

سعة العدد ع هى : ق (∠ ٩ و ب)

حيث : سع (ع) = θ

ملاحظات

س = ل حتا θ ، ص = ل حا θ

إذا كانت : θ ∈] ٠ ، ٢π] فإن : θ تسمى السعة الأساسية للعدد المركب

إذا كانت : θ سعة عدد مركب فإن : كل من (θ + ٢ ν π) " حيث ν ∈ ص+ يكون سعة لنفس العدد المركب

موقع θ	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
س	+	–	–	+
ص	+	+	–	–

الصورة المثلثية للعدد المركب

ع = ل (حتا θ + ت حا θ) حيث :

ل = | ع | ، θ هى السعة للعدد ع

ملاحظة

الصور المثلثية لقوى العدد ت	
قوى العدد ت	الصورة المثلثية
١	(حتا ٠ + ت حا ٠)
ت	(حتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت حا $\frac{\pi}{٢}$)
− ١	(حتا π + ت حا π)
− ت	(حتا $\frac{٣\pi}{٢}$ + ت حا $\frac{٣\pi}{٢}$)

المقياس و السعة لحاصل عددين مركبين

المقياس و السعة لخارج قسمة عددين مركبين

إذا كان : $ع_١$ = $ل_١$ (حتا $\theta_١$ + ت حا $\theta_١$) ، $ع_٢$ = $ل_٢$ (حا $\theta_٢$ + ت حا $\theta_٢$) فإن :

$ع_١$ $ع_٢$ = $ل_١$ $ل_٢$ (حتا [$\theta_١ + \theta_٢$] + ت حا [$\theta_١ + \theta_٢$])

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ (حتا [$\theta_١ - \theta_٢$] + ت حا [$\theta_١ - \theta_٢$])

ملاحظات

$ع^٢$ = $ل^٢$ (حتا ٢ θ + ت حا ٢ θ) ،

$ع^ن$ = $ل^ن$ (حتا ن θ + ت حا ن θ)

الصور المثلثية لبعض الأعداد المركبة			
العدد	الصورة المثلثية	العدد	الصورة المثلثية
− ع	ل (حتا [π + θ] + ت حا [π + θ])	$\bar{ع}$	ل (حتا [− θ] + ت حا [− θ])
$\frac{١}{ع}$ ($ع^{-١}$)	$\frac{١}{ل}$ (حتا [− θ] + ت حا [− θ])	$\frac{١}{\bar{ع}}$	$\frac{١}{ل}$ (حتا θ + ت حا θ)

تابع : الأعداد المركبة

ملاحظة

يجب كتابة العدد ع بالصورة المثلثية ل (حتا θ + ت حا θ) حيث θ ∈ [٠ ، ٢π [و ذلك حسب الربع الذى يقع فيه العدد ع	
الصورة المعطاه للعدد	**الربع الذى يقع فيه ع**
ل (حا θ + ت حتا θ) = ل (حتا [$\frac{١}{٢}$π − θ] + ت حا [$\frac{١}{٢}$π − θ])	الأول
ل (− حتا θ + ت حا θ) = ل (حتا [π − θ] + ت حا [π − θ])	الثانى
ل (−حا θ + ت حتا θ) = ل (حتا [$\frac{١}{٢}$π + θ] + ت حا [$\frac{١}{٢}$π + θ])	الثانى
ل (− حتا θ − ت حا θ) = ل (حتا [π + θ] + ت حا [π + θ])	الثالث
ل (−حا θ −ت حتا θ) = ل (حتا [$\frac{٣}{٢}$π − θ] + ت حا [$\frac{٣}{٢}$π − θ])	الثالث
ل (حتا θ − ت حا θ) = ل (حتا [− θ] + ت حا [− θ])	الرابع
ل (حا θ − ت حتا θ) = ل (حتا [$\frac{٣}{٢}$π + θ] + ت حا [$\frac{٣}{٢}$π + θ])	الرابع

الصور الأسية للعدد المركب

ع = ل هـ^ت θ حيث :

θ بالتقدير الدائرى

العمليات على الأعداد المركبة فى الصورة الأسية

(١) ل١ هـ^(ت θ١) × ل٢ هـ^(ت θ٢) = ل١ ل٢ هـ^(ت (θ١ + θ٢))

(٢) $\frac{\text{ل١ هـ}^{\text{ت } θ_١}}{\text{ل٢ هـ}^{\text{ت } θ_٢}}$ = $\frac{\text{ل١}}{\text{ل٢}}$ هـ^(ت (θ١ − θ٢))

(٣) (ل هـ^(ت θ))^ن = ل^ن هـ^(ت ن θ)

(٤) $\sqrt[ن]{\text{ل هـ}^{\text{ت } θ}}$ = $\sqrt[ن]{\text{ل}}$ هـ^($\frac{θ + ٢ر π}{ن}$ × ت)

حيث : ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠٠ ، (ن − ١)

نظرية ديموافر

إذا كان : ن عدداً نسبياً فإن :

$$(\text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta)^{\text{ن}} = \text{حتا}\,\text{ن}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\text{ن}\,\theta$$

إذا كان : ن ∈ ص~

$$(\text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta)^{\text{ن}} = \text{حتا}\,\text{ن}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\text{ن}\,\theta$$

و يكون للمقدار قيمة وحيدة

إذا كان : ن كسر حقيقى و ليكن $\left(\frac{1}{\text{ل}}\right)$ فإن :

$$(\text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta)^{\frac{1}{\text{ل}}} = \text{حتا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{\text{ل}} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{\text{ل}}$$

حيث : ر = ٠، ١، ٢، ٣، .... ، (ل − ١)، ل ∈ ص~+

ملاحظات

- جميع الجذور لها نفس المقياس
- السعة الأساسية للجذور تبدأ من $\frac{\theta}{\text{ل}}$ و تزداد بمقدار $\frac{2\pi}{\text{ل}}$
- عدد الجذور = ل
- المقدار يعطى الجذور من أى درجة للعدد المركب

خطوات إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب

بالصورة المثلثية

إذا كان : ع = س + ت ص فإن :

$$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \text{ل}^{\frac{1}{2}}(\text{حا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حتا}\,\theta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{ل}}\left(\text{حتا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{2}\right)$$

حيث : ر = ٠ ، ١

أى الجذرين التربيعيين للعدد ع هما :

$$\sqrt{\text{ل}}\left(\text{حتا}\,\tfrac{1}{2}\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\tfrac{1}{2}\theta\right) ،$$

$$\sqrt{\text{ل}}\left(\text{حتا}\,[\pi + \tfrac{1}{2}\theta] + \text{ت}\,\text{حا}\,[\pi + \tfrac{1}{2}\theta]\right)$$

بالصورة الجبرية

إذا كان : ع = س + ت ص

نفرض أن :

$$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = (\text{س} + \text{ت}\,\text{ص})^{\frac{1}{2}} = \text{أ} + \text{ب}\,\text{ت}$$

بالتربيع ينتج :

$$\text{س} + \text{ت}\,\text{ص} = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 + 2\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{ت}$$

من خواص الأعداد المركبة نستنتج :

$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \text{س}$ (١)

، $2\,\text{أ}\,\text{ب} = \text{ص}$ (٢)

و بحل (١) ، (٢) ينتج :

أ ، ب و بالتالى نحصل على الجذرين التربيعيين للعدد ع

ملاحظة

إذا كان : ٢ أ ب موجب فإن : أ ، ب متشابهين فى الإشارة

أما إذا كان : ٢ أ ب سالب فإن : أ ، ب مختلفين فى الإشارة

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

الصورة المثلثية

(حتا ٠ + ت حا ٠)

، (حتا $\frac{٢}{٣}\pi$ + ت حا $\frac{٢}{٣}\pi$)

، (حتا $\frac{٤}{٣}\pi$ + ت حا $\frac{٤}{٣}\pi$)

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

مربع أى جذر من الجذرين التكعيبين التخليليين للواحد الصحيح يساوى الجذر الآخر و يرمز لها بالرموز : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$

أحد الجذور حقيقى و الآخران مركبان و مترافقان

النقاط التى تمثلها تقع فى شكل أرجاند على دائرة الوحدة و تقسمها إلى ثلاث أقواس متساوية الطول

الجذور الثلاثة لها نفس المقياس و هو الواحد ، و قياسات زوايا سعتها هى : ٠ ، $\frac{٢}{٣}\pi$ ، $\frac{٤}{٣}\pi$

$١ + \omega + \omega^{٢} =$ صفر

$\omega + \omega^{٢} = -١$

$١ + \omega^{٢} = -\omega$

$١ + \omega = -\omega^{٢}$

$\omega - \omega^{٢} =$

$\omega^{٢} - \omega =$

$\pm \sqrt{٣}$ ت

الصورة الجبرية

١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

قوى (ω) الصحيحة

قوى (ω) الصحيحة تعطى إحدى القيم		
١	ω	$\omega^{٢}$

قيم العدد ω تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٣

لإيجاد $\omega^{ن}$ في أبسط صورة حيث ن $\in$ ص$_+$ نقسم ن على ٣ فيكون : $\omega^{ن}$ = إحدى القيم كما يلى :

باقى القسمة	٠	١	٢
القيمة	١	ω	$\omega^{٢}$

لإيجاد $\omega^{-ن}$ فى أبسط صورة حيث ن $\in$ ص$_+$ نضيف إلى الأس عدد يقبل القسمة على ٣ و يكون أكبر من ن مباشرة

المحددات

تعريف المحدد

المحدد من الدرجة $ن$ يتكون من $ن$ من الصفوف (ص) ، $ن$ من الأعمدة (ع) و ينشأ من حذف ($ن - ١$) من المتغيرات من $ن$ من المعادلات الخطية

حيث العنصر : $أ_{ص ع} \in ح$ ؛ ص ، ع = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، $ن$

ملاحظات

العناصر $أ_{ص ع}$ من الممكن أن تكون أعداداً حقيقية أو أعداداً مركبة أو دوال حقيقية

درجة المحدد

قيمة كل من ص ، ع تحدد درجة المحدد

فإذا كانت : $ن = ٢$ فإن : المحدد من الدرجة ٢

، إذا كانت : $ن = ٣$ فإن : المحدد من الدرجة ٣

و هكذا

العوامل المرافقة لعناصر المحددات

فى محدد الدرجة الثالثة $م_٣$ إذا أخذنا العنصر $أ_{ص ع}$ الذى يقع فى الصف ص و العمود ع و حذفنا الصف ص و العمود ع فإنه ينشأ المحدد $م_٢$ ، و إذا ضربنا المحدد الناتج فى $(-١)^{ص + ع}$ فإن الكمية الناتجة تسمى بالعامل المرافق

إشارة العوامل المرافق

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

قيمة المحدد

إذا كانت : $ن = ١$ فإن :

$$م_١ = |أ_{١١}| = أ_{١١}$$

إذا كانت : $ن = ٢$ فإن :

$$م_٢ = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix}$$

$$= أ_{١١} أ_{٢٢} - أ_{٢١} أ_{١٢}$$

إذا كانت : $ن = ٣$ فإن :

$$م_٣ = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

$$= أ_{١١} (أ_{٢٢} أ_{٣٣} - أ_{٣٢} أ_{٢٣}) - أ_{٢١} (أ_{١٢} أ_{٣٣}$$
$$- أ_{٣٢} أ_{١٣}) + أ_{٣١} (أ_{١٢} أ_{٢٣} - أ_{٢٢} أ_{١٣})$$

إذا كان (س - أ) أحد عوامل محدد فإن : س = أ تجعل قيمة المحدد = صفر

خواص المحددات

في أي محدد إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف لنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير

إذا ضربنا عناصر صف (عمود) من محدد فى عدد ما و أضفناها إلى نظائرها من عناصر صف آخر (عمود آخر) فإن قيمة المحدد لا تتغير

فى أى محدد إذا كتبت جميع عناصر صف أو عمود كمجموع عنصرين فإن قيمة المحدد يمكن كتابتها كمجموع محددين

إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف أو عمود فى محدد فيمكن أخذه خارج المحدد

إذا بدلنا موضع صفان أو عمودان من محدد فإن قيمة المحدد الناتج تساوى المحدد الأصلى و تخالفه فى الإشارة

قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أحد صفوفه أو عناصر أحد أعمدته

قيمة أى محدد على الصورة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

الصورة المثلثية للمحدد

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & \text{أ}_{١١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix}$$

أو

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} & ٠ \\ \text{أ}_{٣٣} & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

و تكون قيمة المحدد

$$= \text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} \times \text{أ}_{٣٣}$$

حالات إنعدام قيمة المحدد

إذا تساوت العناصر المناظرة فى أى صفين (عمودين) فى محدد فإن قيمة المحدد تساوى صفراً

إذا كانت جميع عناصر صف أو عمود فى محدد أصفار فإن قيمته تساوى صفراً

فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر و جمعنا الناتج فإن النتيجة تساوى صفراً

إذا كان (س – أ) أحد عوامل محدد فإن : س = أ جعل قيمة المحدد = صفر

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

تستخدم المحددات لحل مجموعة من المعادلات الخطية إذا كان : عدد المعاملات = عدد المجاهيل

الخطوات

(١) نوجد : Δ = محدد معاملات المجاهيل س ، ص ، ع

(٢) نوجد : $\Delta_{\text{س}}$ = محدد المجهول س نحصل عليه بوضع الثوابت من معاملات س

(٣) نوجد : $\Delta_{\text{ص}}$ = محدد المجهول ص نحصل عليه بوضع الثوابت بدلاً من معاملات ص

(٤) نوجد : $\Delta_{\text{ع}}$ = محدد المجهول ع نحصل عليه بوضع الثوابت بدلاً من معاملات ع

(٥) نوجد قيم المجاهيل كما يلى : س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ ، ع = $\frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$

ملاحظات

- إذا كان : $\Delta \neq$ صفر فإن : لمجموعة المعادلات حل وحيد
- إذا كان : $\Delta = \Delta_{\text{س}} = \Delta_{\text{ص}} = \Delta_{\text{ع}}$ = صفر فإن :لمجموعة المعادلات عدد لا نهائى من الحلول
- إذا كان : Δ = صفر ، أحد المحددات $\Delta_{\text{س}}$ ، $\Delta_{\text{ص}}$ ، $\Delta_{\text{ع}}$ فإن : لمجموعة المعادلات ليس لها حل

(الحالتان الأخيرتان) خارج نطاق المقرر

فى حالة حل معادلتين فى مجهولين س ، ص نوجد قيم س ، ص فقط